

48.- Estudiar el rango de la matriz que sigue, mediante transformaciones de filas y columnas, indicando en cada caso la transformación realizada.

$$M = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} b & a & a \\ a & b & a \\ a & a & b \end{matrix}$$

A la fila 3ª le restamos la 2ª:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} b & a & a \\ a & b & a \\ 0 & a-b & b-a \end{matrix}$$

A la fila 1ª le restamos la 2ª:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} b-a & a-b & 0 \\ a & b & a \\ 0 & a-b & b-a \end{matrix} \left| \begin{matrix} a-b & b-a \\ b & 2a \end{matrix} \right.$$

A la columna 3ª le sumamos la 1ª:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} b-a & a-b & b-a \\ a & b & 2a \\ 0 & a-b & b-a \end{matrix}$$

Por último a la fila tercera le restamos la primera:

$$\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix} \begin{matrix} b-a & a-b & b-a \\ a & b & 2a \\ a-b & 0 & 0 \end{matrix}$$

matriz cuyo determinante, se puede desarrollar por los elementos de la 3ª fila:

$$\begin{vmatrix} b-a & a-b & b-a \\ a & b & 2a \\ a-b & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-b) \begin{vmatrix} a-b & b-a \\ b & 2a \end{vmatrix} = (a-b) \cdot [2a \cdot (a-b) - b(b-a)]$$

$$= (a-b)^2 \cdot [b+2a]$$

Para que el determinante sea = 0 (rango de la matriz < 3) se ha de cumplir que

$$(a-b)^2 \cdot [b+2a] = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$\quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \Rightarrow \quad b = -2a$$

**El rango de la matriz es = 3 si  $a \neq b$  y  $b \neq -2a$**